Durée : 3 heures Coefficient : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

$\mathcal{P}_n$ désignera dans le problème l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels; $n \in \mathbb{N}$.

- I -

1) On considère l'équation différentielle linéaire définie sur l'intervalle $]-1, 1[$:

$$(1) \quad (1 - x^2)\, y''(x) - x\, y'(x) + n^2\, y(x) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Expliciter puis résoudre l'équation différentielle obtenue en introduisant dans (1) le changement de variable $x = \cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$.
En déduire la solution particulière $y_n(x)$ de (1) telle que pour $N \in \mathbb{N}$:

$$(2) \quad y_{2N}(0) = (-1)^N$$
$$(3) \quad y'_{2N}(0) = 0$$
$$(4) \quad y_{2N+1}(0) = 0$$
$$(5) \quad y'_{2N+1}(0) = (-1)^N (2N + 1)$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(6) \quad \forall x \in]-1, 1[\qquad T_n(x) = y_n(x)$$
$$(7) \quad T_n(-1) = (-1)^n$$
$$(8) \quad T_n(1) = 1$$

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, T_n est une fonction continue de x sur l'intervalle fermé $[-1, 1]$.

b) Calculer : $\cos(n + 1)\theta + \cos(n - 1)\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\cos n\theta$ et montrer qu'il existe une relation de récurrence liant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, T_{n+1}, T_n et T_{n-1}. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n appartient à l'ensemble $\mathcal{P}'_n$ des polynômes de degré n à coefficient réels.

c) Donner les expressions de T_0, T_1, T_2, T_3.

d) Déterminer le coefficient du monôme de plus haut degré dans le polynôme T_n. Quelle relation existe-t-il entre $T_n(x)$ et $T_n(-x)$?

3) Exprimer les racines de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ sous la forme $x_k = \cos(\alpha_{k,n}\ \theta)$ où $\alpha_{k,n}$ dépend des entiers k et n, et θ appartient à $\mathbb{R}$.

4) On se fixe un nombre réel x tel que $|x| \leq 1$ et l'on considère la fraction rationnelle :

$$(9) \qquad G(x,t) = (1 - t^2) / (1 - 2tx + t^2) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Décomposer G en éléments simples sur le corps des complexes $\mathbb{C}$. En déduire que G admet un développement en série entière suivant les puissances croissantes de t dont on précisera le rayon de convergence :

$$(10) \qquad G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\ t^n$$

b) En justifiant la dérivation par rapport à t de (10), retrouver la relation de récurrence liant T_{n+1}, T_n et T_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- II -

Soient P et Q deux éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$.

On définit une application de $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n$ dans $\mathbb{R}$ notée (P/Q) par l'intégrale :

$$(11) \qquad (P/Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)\ Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

1) Montrer que cette intégrale est convergente.

2) Montrer que (P/Q) définit un produit scalaire dans $\mathcal{P}_n$.

3) Soient m et n deux entiers naturels.

a) Exprimer en fonction de m et n l'intégrale :

$$(12) \qquad I_{m,n} = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta\ d\theta$$

b) En déduire, suivant les valeurs de m et n l'expression de :

$$(13) \qquad J_{m,n} = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\ T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

c) Montrer que la famille des polynômes

$\left(\frac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ T_1, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ T_n \right)$ constitue une base orthonormée de $\mathcal{P}_n$.

4) Soient m et n deux entiers de $\mathbb{N}$ tels que $m < n$, R un élément de $\mathcal{P}_m$, calculer l'intégrale :

$$(14) \qquad K_{m,n} = \int_{-1}^{1} \frac{R(x)\ T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

- III -

On se fixe un entier n strictement positif, et soit P un élément de $\mathcal{P}_{2n-1}$. On désigne à nouveau par x_k ; k = 1, ..., n; les racines de T_n et par T'_n la dérivée de la fonction polynôme T_n.

Soit F une fonction définie sur [-1, 1] par :

$$(15) \qquad F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x - x_k}\ \frac{P(x_k)}{T'_n(x_k)} & \text{si } x \neq x_i ;\ i = 1, n \\ P(x_i) & \text{si } x = x_i ;\ i = 1, n \end{cases}$$

1) Montrer que S définie par la relation :

$$(16) \qquad S(x) = \Big(F(x) - P(x)\Big) \ / \ T_n(x) \text{ est un élément de } \mathcal{P}_{n-1}.$$

2) On pose :

$$(17) \qquad \lambda_{k,n} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \frac{T_n(x)}{x - x_k}\ \frac{dx}{T'_n(x_k)}$$

a) Montrer l'existence de $\lambda_{k,n}$.

b) Exprimer alors l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ sous la forme : $\sum_{k=1}^{n} \beta_k P(x_k)$ où l'on explicitera β_k en fonction de $\lambda_{k,n}$.

3) On effectue les changements de variable suivants :

(18) $x = \cos\theta \quad ; \quad \theta \in [0, \pi]$

(19) $x_k = \cos\theta_k = \cos\left(\frac{2k - 1}{2n}\pi\right)$; $k = 1, \ldots, n$

soit $g_{k,n}$ une fonction de θ définie sur $[0, \pi]$ par :

(20) $$g_{k,n}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} & \text{si } \theta \neq \theta_k \\ n\,\dfrac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k} & \text{si } \theta = \theta_k \end{cases}$$

a) Montrer que :

(21) $$\lambda_{k,n} = \frac{1}{g_{k,n}(\theta_k)} \int_0^{\pi} g_{k,n}(\theta)\, d\theta$$

b) Montrer qu'il existe un n-uplet unique de nombres réels γ_j; $j = 1, \ldots, n$; dépendant de k et de n tel que :

(22) $$g_{k,n}(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \cos(j - 1)\theta$$

En déduire alors que $\gamma_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_{k,n}(\theta)\, d\theta$

Calculer $\sum_{\ell=1}^{n} g_{k,n}(\theta_\ell)$ et montrer que $\lambda_{k,n}$ est indépendant de k.

Donner alors sa valeur λ_n.

A l'aide des résultats précédents, calculer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{(x + 1)^4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$